

Pochodna i różniczka funkcji oraz jej zastosowanie do obliczania niepewności pomiarowych

Krzysztof Rębilas

DEFINICJA POCHODNEJ

Pochodna funkcji $f(x)$ w punkcie x określona jest jako granica:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Oznaczamy ją symbolami:

$$\boxed{f'(x) \quad \text{lub} \quad \frac{df}{dx}}. \quad (2)$$

Dla przykładu obliczmy pochodną funkcji $f(x) = x^2$. Na podstawie definicji (1) mamy:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x. \end{aligned} \quad (3)$$

Otrzymany wynik na pochodną funkcji $f(x) = x^2$ zapisujemy w postaci:

$$(x^2)' = 2x \quad (4)$$

W podobny sposób można na podstawie definicji (1) znaleźć wzory na pochodne podstawowych funkcji matematycznych. Poniżej przedstawiamy gotowe rezultaty obliczeń dla wybranych funkcji (a oraz n oznaczają stałe):

$$\boxed{(a)' = 0} \quad (5)$$

$$\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}} \quad (6)$$

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x} \quad (7)$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x} \quad (8)$$

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}} \quad (9)$$

Łatwo sprawdzić, że znaleziony przez nas wynik na pochodną funkcji $f(x) = x^2$ (wzór (38)) jest szczególnym przypadkiem ogólnego wzoru (6), w którym należy podstawić $n = 2$. Dla przykładu obliczmy jeszcze pochodną funkcji $f(x) = x^4$. Korzystając z wzoru (6), mamy: $(x^4)' = 4x^3$.

Użyteczne są również wzory pozwalające obliczać pochodne wyrażeń złożonych będących iloczynem stałej a i funkcji f , sumą lub różnicą dwóch funkcji f i g oraz iloczynem lub ilorazem funkcji f i g :

$$\boxed{(a \cdot f)' = a \cdot (f)'} \quad (10)$$

$$\boxed{(f \pm g)' = f' \pm g'} \quad (11)$$

$$\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'} \quad (12)$$

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}} \quad (13)$$

$$\boxed{[f(g)]' = f'(g) \cdot g'} \quad (14)$$

Wzór (10) wykorzystujemy na przykład dla obliczenia pochodnej funkcji $f(x) = 4x^3$:

$$(4x^3)' = 4(x^3)' = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2. \quad (15)$$

Wzór (11) jest użyteczny na przykład w następującym przypadku:

$$(2x^3 + 6x^5)' = (2x^3)' + (6x^5)' = 2 \cdot 3x^2 + 6 \cdot 5x^4. \quad (16)$$

Wzór (11) zastosowaliśmy identyfikując odpowiednie funkcje jako: $f = 2x^3$ oraz $g = 6x^5$. Ostatnia równość w powyższym równaniu wynika z wzorów (6) i (10).

Poniżej mamy przykład zastosowania wzoru (12):

$$\begin{aligned} (x^3 \cdot \sin x)' &= (x^3)' \cdot \sin x + x^3 \cdot (\sin x)' = \\ &= 3x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x, \end{aligned} \quad (17)$$

gdzie odpowiednie funkcje to: $f = x^3$ oraz $g = \sin x$.

Gdy mamy funkcję złożoną $f(g)$, stosujemy wzór (14):

$$[\sin(3x)]' = \sin'(3x) \cdot (3x)' = \cos(3x) \cdot 3,$$

gdzie $f = \sin(\dots)$, $g = 3x$.

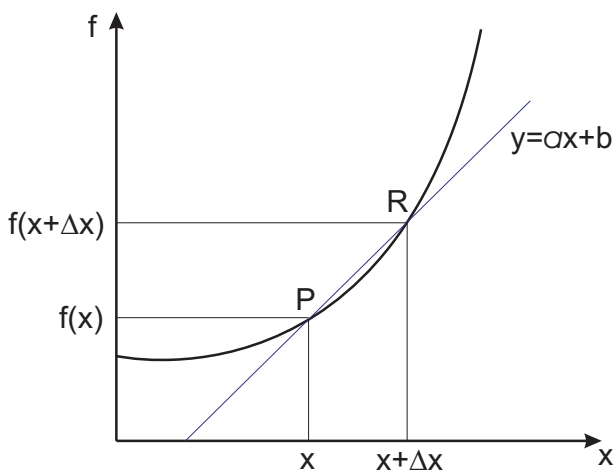
Wzór (13) należy zastosować w przypadku:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2x^4 - 7x}{3x^2 + x^3} \right)' = \\ & = \frac{(2x^4 - 7x)' \cdot (3x^2 + x^3) - (2x^4 - 7x) \cdot (3x^2 + x^3)'}{(3x^2 + x^3)^2} = \\ & = \frac{(2 \cdot 4x^3 - 7) \cdot (3x^2 + x^3) - (2x^4 - 7x) \cdot (3 \cdot 2x + 3x^2)}{(3x^2 + x^3)^2} = \dots \end{aligned}$$

gdzie przyjęliśmy $f = 2x^4 - 7x$ oraz $g = 3x^2 + x^3$.

GEOMETRYCZNA INTERPRETACJA POCHODNEJ

W definicji pochodnej (1) występuje stosunek zmiany wartości funkcji $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ do zmiany wartości argumentu Δx . Na Rys. (1) pokazano wykres funkcji



Rysunek 1. Sieczna przechodząca przez punkty P i R w granicy $\Delta x \rightarrow 0$ staje się styczną do wykresu w punkcie x .

$f(x)$, na którym zaznaczono sieczną przecinającą funkcję w punktach $P = [x, f(x)]$ i $R = [x + \Delta x, f(x + \Delta x)]$. Sieczna jako prosta opisana jest równaniem postaci $y = ax + b$, gdzie a to tzw. współczynnik kierunkowy prostej, którego wartość dana jest przez stosunek $a = \Delta y / \Delta x$. Na podstawie Rys. (1) widzimy, że iloraz $\Delta f / \Delta x$ to właśnie współczynnik kierunkowy siecznej przecinającej wykres funkcji w punktach P i R .

W granicy $\Delta x \rightarrow 0$ punkty P i R zlewają się i sieczna staje się *styczną* do wykresu w punkcie P . Oznacza to, że w granicy $\Delta x \rightarrow 0$ stosunek $\Delta f / \Delta x$ (czyli pochodna funkcji) staje się współczynnikiem kierunkowym stycznej. A zatem:

Pochodna funkcji df/dx w punkcie x ma wartość współczynnika kierunkowego stycznej do wykresu funkcji f poprowadzonej w punkcie $P = [x, f(x)]$.

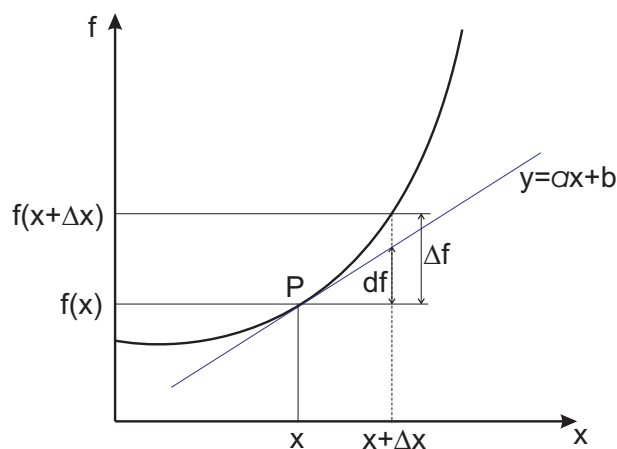
RÓŻNICZKA FUNKCJI

Różniczka funkcji df przy zmianie jej argumentu o Δx określona jest jako iloczyn pochodnej df/dx i zmiany Δx , czyli:

$$df = \frac{df}{dx} \Delta x. \quad (18)$$

Zauważmy, że różniczka funkcji df jest równa *zmianie wartości stycznej* w punkcie x następującej na odcinku od x do $x + \Delta x$ (patrz Rys. (2)). Wynika to stąd, że zmiana wartości stycznej o równaniu $y = ax + b$ wynosi $\Delta y = a\Delta x$, a współczynnik kierunkowy stycznej, jak pokazano powyżej, ma wartość pochodnej: $a = df/dx$ liczonej w miejscu x .

Na podstawie Rys. (2) można się przekonać, że dla ma-



Rysunek 2. Graficzne przedstawienie różniczki funkcji df .

łych wartości Δx różniczka funkcji df jest bardzo dobrym przybliżeniem zmiany wartości funkcji Δf :

$$\Delta f \cong df. \quad (19)$$

A zatem, stosując powyższe przybliżenie, zmianę wartości funkcji Δf przy zmianie argumentu o Δx możemy obliczać z wzoru:

$$\Delta f \cong \frac{df}{dx} \Delta x. \quad (20)$$

OBLICZANIE NIEPEWNOŚCI POMIAROWEJ

Przybliżenie (20) wykorzystujemy przy obliczaniu niepewności pomiarowych wielkości mierzonych pośrednio. Niech f będzie pewną wielkością fizyczną daną poprzez wyrażenie funkcyjne $f(x)$, gdzie x jest wielkością mierzoną bezpośrednio. Wartość wielkości f (mierzonej pośrednio) jest uzyskiwana na drodze obliczenia wartości wyrażenia $f(x)$ dla zmierzonej wartości x . Z powodu nieunik-

nionego błędu pomiarowego Δx , uzyskana wartość wielkości f będzie się różnić od wartości prawdziwej o pewną wartość Δf . Ponieważ błędy pomiarowe mają zwykle małe wartości, Δf można przybliżyć, stosując wyrażenie (20). Błąd pomiarowy Δx jest wielkością nieznaną, więc Δf również. Można jednak podnieść do kwadratu równanie (20) i stosując podejście statystyczne otrzymać wyrażenie na tzw. wartość oczekiwaną obu stron równania. Otrzymamy wówczas:

$$u^2(f) = \left(\frac{df}{dx} \right)^2 u^2(x), \quad (21)$$

gdzie $u^2(x)$ to wartość oczekiwana $(\Delta x)^2$, a $u^2(f)$ to wartość oczekiwana $(\Delta f)^2$. Stosując pewną argumentację naukową można oszacować wartość $u^2(x)$ i na podstawie (21) znaleźć wartość oczekiwaną $u^2(f)$. Wielkości $u(x)$ oraz $u(f)$ to tzw. niepewności standardowe wyznaczenia wielkości, odpowiednio, x i f . Z wzoru (21) otrzymujemy:

$$u(f) = \sqrt{\left(\frac{df}{dx} \right)^2 u^2(x)}. \quad (22)$$

PRZYKŁAD: Chcąc wyznaczyć objętość kuli, mierzymy jej promień r i wstawiamy do wzoru:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3. \quad (23)$$

Pomiar objętości kuli jest zatem pomiarem pośrednim, a wielkością mierzoną bezpośrednio jest promień r . Załóżmy, że znamy niepewność standardową pomiaru bezpośredniego, czyli znamy $u(r)$. Oznacza to, iż prawdziwa wartość promienia r mieści się z dużym prawdopodobieństwem w przedziale $(r - u(r), r + u(r))$. Jak pokazuje Rys. 3, przedziałowi możliwych wartości r odpowiada pewien przedział $(V - u(V), V + u(V))$, w którym może się znajdować prawdziwa wartość objętości. Aby znaleźć $u(f)$ korzystamy z wzoru (22), czyli mamy:

$$u(V) = \sqrt{\left(\frac{dV}{dr} \right)^2 u^2(r)}. \quad (24)$$

Tak określona wartość $u(V)$ wyznacza nam tzw. niepewność standardową pomiaru objętości.

Wykonajmy obliczenia dla przykładowych wartości liczbowych. Niech w wyniku pomiaru uzyskana wartość promienia i błąd pomiaru wynoszą:

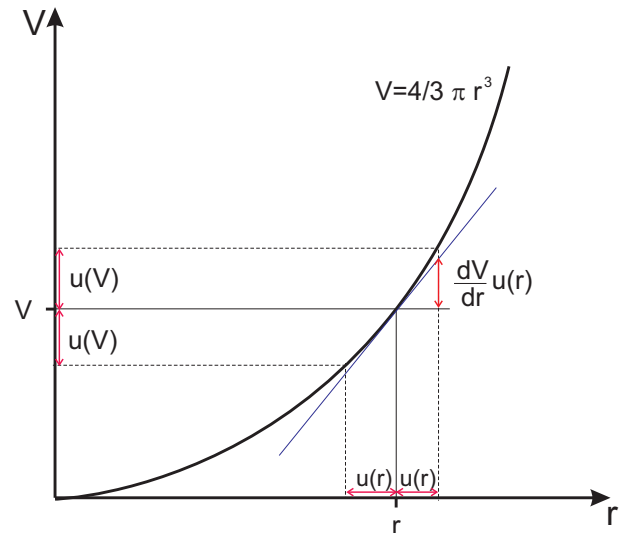
$$r = 2,64 \text{ cm}, \quad u(r) = 0,0058 \text{ cm}. \quad (25)$$

Ze wzoru (23) otrzymujemy wtedy:

$$V = 24,53299 \text{ cm}^3. \quad (26)$$

Aby oszacować niepewność $u(V)$ najpierw znajdujemy wzór na pochodną dV/dr . W tym celu korzystamy z tabeli wyżej podanych wzorów (wzór (6)) i otrzymujemy:

$$\frac{dV}{dr} = \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)' = \frac{4}{3} \pi \cdot 3 \cdot r^2 = 4\pi r^2. \quad (27)$$



Rysunek 3. Przedziałowi możliwych wartości promienia kuli $(r - u(r), r + u(r))$ odpowiada pewien przedział możliwych wartości objętości $(V - u(V), V + u(V))$.

Wstawiając ten wynik do wzoru (24), mamy::

$$u(V) = \sqrt{(4\pi r^2)^2 \cdot u^2(r)}, \quad (28)$$

co po podstawieniu wartości liczbowych daje $u(V) = 0,51 \text{ cm}^3$. Ostatecznie zatem, po zaokrągleniu wyniku (26), mamy:

$$V = 24,53 \text{ cm}^3, \quad u(V) = 0,51 \text{ cm}^3. \quad (29)$$

POCHODNA CZĄSTKOWA

Dla funkcji wielu zmiennych $f(x, y, z)$, jako uogólnienie pojęcia pochodnej, określona jest tzw. pochodna cząstkowa. Pochodna cząstkowa po zmiennej x (ozn. $\partial f/\partial x$) zdefiniowana jest jako granica:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}. \quad (30)$$

Analogicznie określona jest pochodna cząstkowa po zmiennej y i po zmiennej z :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}, \quad (31)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}. \quad (32)$$

Z definicji pochodnej cząstkowej wynika, że obliczanie pochodnej cząstkowej po jakiejś zmiennej nie różni się od obliczania zwykłej pochodnej, przy czym pozostałe zmienne należy w trakcie obliczania pochodnej traktować jako wielkości *stałe*.

Na przykład, jeśli wykonujemy pochodną po zmiennej x , wówczas y i z uznajemy za stałe, czyli funkcja $f(x, y, z)$ na czas liczenia pochodnej staje się jakby funkcją tylko *jednej* zmiennej x . Wszystkie podane wcześniej wzory (5)-(13) na pochodne funkcji jednej zmiennej mają zatem zastosowanie również przy obliczaniu pochodnych cząstkowych.

Podajmy kilka przykładów obliczania pochodnej cząstkowej.

Przykład 1:

$$f = x^2 + y^3 + z^4$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial x}(y^3) + \frac{\partial}{\partial x}(z^4) = \\ &= 2x + 0 + 0 = 2x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3) + \frac{\partial}{\partial y}(z^4) = \\ &= 0 + 3y^2 + 0 = 3y^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(x^2) + \frac{\partial}{\partial z}(y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(z^4) = \\ &= 0 + 0 + 4z^3 = 4z^3. \end{aligned}$$

Wykorzystaliśmy tu własność (11), że pochodna sumy jest sumą pochodnych, oraz fakt, że pochodna ze stałej wynosi zero.

Przykład 2:

$$f = \frac{x^2 + y^3}{y^4 + z^5}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2}{y^4 + z^5} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y^3}{y^4 + z^5} \right) = \\ &= \frac{1}{y^4 + z^5} \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + 0 = \frac{2x}{y^4 + z^5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^3) \cdot (y^4 + z^5) - (x^2 + y^3) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(y^4 + z^5)}{(y^4 + z^5)^2} = \\ &= \frac{(3y^2) \cdot (y^4 + z^5) - (x^2 + y^3) \cdot (4y^3)}{(y^4 + z^5)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^3) \cdot (y^4 + z^5) - (x^2 + y^3) \cdot \frac{\partial}{\partial z}(y^4 + z^5)}{(y^4 + z^5)^2} = \\ &= \frac{0 \cdot (y^4 + z^5) - (x^2 + y^3) \cdot (5z^4)}{(y^4 + z^5)^2} = \frac{-(x^2 + y^3) \cdot (5z^4)}{(y^4 + z^5)^2}. \end{aligned}$$

Przy liczeniu pochodnej cząstkowej po y i z zastosowaliśmy wzór na pochodną ilorazu (13).

Przykład 3:

$$f = \frac{xy}{x + y}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\frac{\partial}{\partial x}(xy) \cdot (x + y) - (xy) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x + y)}{(x + y)^2} = \\ &= \frac{(y) \cdot (x + y) - (xy) \cdot (1 + 0)}{(x + y)^2} = \frac{y^2}{(x + y)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\frac{\partial}{\partial y}(xy) \cdot (x + y) - (xy) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x + y)}{(x + y)^2} = \\ &= \frac{(x) \cdot (x + y) - (xy) \cdot (0 + 1)}{(x + y)^2} = \frac{x^2}{(x + y)^2}. \end{aligned}$$

Przy liczeniu pochodnej $\frac{\partial}{\partial x}(xy)$ skorzystaliśmy z wzoru (6). Dzięki temu, pamiętając że y jest traktowane teraz jak stała, mamy: $\frac{\partial}{\partial x}(xy) = y \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x) = y \cdot 1 = y$. Analogicznie postąpiliśmy licząc pochodną cząstkową $\frac{\partial}{\partial y}(xy)$, co dało nam w wyniku: $\frac{\partial}{\partial y}(xy) = x \cdot \frac{\partial}{\partial y}(y) = x \cdot 1 = x$.

RÓŻNICZKA ZUPEŁNA FUNKCJI

Różniczką zupełną df funkcji $f(x, y, z)$ nazywamy wyrażenie:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z. \quad (33)$$

Jak widać jest to uogólnienie pojęcia różniczki funkcji dla funkcji wielu zmiennych.

Jeżeli zmiana argumentów funkcji Δx , Δy , Δz jest niewielka, wówczas różniczka zupełna funkcji df jest bardzo dobrym przybliżeniem zmiany wartości funkcji Δf wywołanej zmianą wartości jej argumentów, czyli:

$$\Delta f \cong \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z. \quad (34)$$

OBLICZANIE NIEPEWNOŚCI POMIAROWEJ - UOGÓLNIENIE

Przybliżenie (34) wykorzystywane jest w analizie niepewności pomiarowych. Jeśli jakaś wielkość fizyczna wyraża się w formie zależności funkcyjnej $f(x, y, z)$ od zmierzonych bezpośrednio i niezależnie wielkości x, y, z , które wyznaczone są z niepewnościami standardowymi równymi, odpowiednio, $u(x), u(y), u(z)$, wówczas, podnosząc do kwadratu wyrażenie (34) i obliczając wartości oczekiwane obu stron (uwzględniając, że wartości oczekiwane iloczynów $\Delta x \Delta y, \Delta x \Delta z, \Delta y \Delta z$ dają zero), otrzymujemy wzór na *niepewność standardową* pomiaru wielkości f :

$$u(f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 u^2(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 u^2(y) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 u^2(z)}.$$

Wzór powyższy jest uogólnieniem wyrażenia (22) na przypadek funkcji wielu zmiennych.

Uwaga: Jeśli zależność funkcyjna jest postaci:

$$f(x, y, z) = kx^a y^b z^c, \quad (35)$$

gdzie a, b, c, k to stałe, wówczas po wyczeniu pochodnych, wstawieniu do powyższego wzoru na $u(f)$ i podzieleniu obustronnym otrzymanego wyrażenia przez f otrzymamy:

$$\frac{u(f)}{f} = \sqrt{a^2 \left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + b^2 \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2 + c^2 \left(\frac{u(z)}{z}\right)^2}.$$

Jest to wygodny wzór do wyliczenia niepewności *względ-*

nej $u(f)/f$ dla wielkości danych wzorem (35).

PRZYKŁAD: Używając wahadła matematycznego, można wyznaczyć przyspieszenie ziemskie g , mierząc bezpośrednio jego długość l oraz okres T i wstawiając do wzoru:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \quad (36)$$

Założmy, że znamy niepewności pomiaru długości, $u(l)$, oraz okresu, $u(T)$. Niepewność wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego $u(g)$ znajdujemy, korzystając z ogólnego wzoru na $u(f)$, czyli:

$$u(g) = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 u^2(l) + \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 u^2(T)}. \quad (37)$$

Obliczając pochodne cząstkowe, dostajemy:

$$u(g) = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)^2 u^2(l) + \left(\frac{-8\pi^2 l}{T^3}\right)^2 u^2(T)}. \quad (38)$$

Uwaga: Ponieważ wzór (36) jest wyrażeniem postaci (35), tzn.

$$g = 4\pi^2 l^1 T^{-2}, \quad (39)$$

zatem można również skorzystać z ogólnego wzoru na $u(f)/f$ (ostatni wzór w ramce powyżej). Mamy wówczas:

$$\frac{u(g)}{g} = \sqrt{(1)^2 \left(\frac{u(l)}{l}\right)^2 + (-2)^2 \left(\frac{u(T)}{T}\right)^2}, \quad (40)$$

co, jak łatwo sprawdzić, jest równoważne wyrażeniu (38).