

Ćwiczenie 3

Wyznaczanie gęstości cieczy za pomocą wagi Mohra

Wstęp teoretyczny: Krzysztof Rębilas.

Autorem ćwiczenia w Pracowni Fizycznej Zakładu Fizyki
Uniwersytetu Rolniczego w Krakowie jest Krystyna Gronostaj.

GĘSTOŚĆ CIAŁA

Gęstość ciała ρ (czyt. *rho*) jest zdefiniowana jako stosunek masy ciała m do jego objętości V :

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1)$$

Innymi słowy, gęstość określa masę jednostki objętości ciała i dla jednorodnych ciał zależy ona od substancji, z której ciało jest wykonane. Ponieważ objętość ciała zależy od temperatury i ciśnienia, w związku z tym gęstość ciała zależy również od tych wielkości fizycznych.

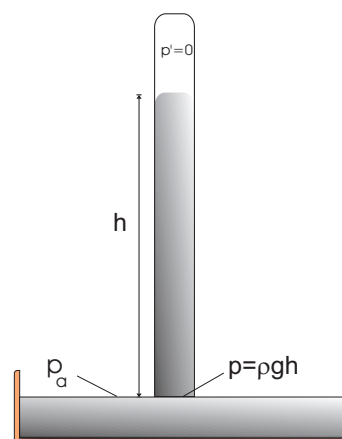
Tabela 1: Gęstości niektórych substancji przy 20°C.

Substancja	ρ [g/cm ³]
Aluminium (glin)	2,72
Cynk	7,13-7,2
Drewno dąb	0,6-0,9
Drewno lipa	0,4-0,6
Guma	1,10-1,19
Korek	0,22-0,26
Lód (przy 0°)	0,88-0,92
Woda (przy 4°)	0,9999
Woda (przy 20°)	0,9981
Miedź	8,93
Ołów	11,3-11,4
Parafina	0,87-0,91
Platyna	21,3-21,5
Srebro	10,5
Stal	7,5-7,9
Złoto	19,3
Alkohol etylowy	0,79
Benzyna	0,68-0,74
Olej lniany	0,935
Mleko	ok.1,3
Rtęć	13,55
Powietrze	0,00129

Dla większości substancji objętość rośnie wraz z temperaturą, co oznacza zmniejszanie się gęstości. Anomalne zachowanie wykazuje woda, która w zakresie temperatur 0 - 4 °C *zmniejsza* swoją objętość, czyli zwiększa gęstość.

Powyżej temperatury 4 °C objętość wody, jak dla większości substancji, rośnie wraz z temperaturą.

Stosunkowo duża gęstość rtęci (Tabela 1) pozwala na konstrukcję przyrządu do pomiaru ciśnienia atmosferycznego, czyli barometru rtęciowego (Rys. 1). Zasadniczym



Rysunek 1. Barometr.

elementem barometru jest pionowo ustawiona rurka szklana zasklepią u góry, w której znajduje się rtęć. Dolna część rurki (otwarta) zanurzona jest w szerokim naczyniu z rtęcią. W sytuacji równowagi rtęć nie wylewa się całkowicie z pionowej rurki. Ogólny warunek równowagi dla cieczy orzeka, iż ciecz jest w równowadze, gdy na danym poziomie w cieczy w każdym miejscu panuje to samo ciśnienie. W szerokim naczyniu na powierzchni rtęć ma ciśnienie równe ciśnieniu atmosferycznemu p_a . Na tym samym poziomie w pionowej rurce ciśnienie rtęci p jest sumą ciśnienia p' gazów nad słupem rtęci oraz ciśnienia wywołanego przez słup rtęci o wysokości h . Zgodnie z *prawem Pascala* wynosi ono

$$p = p' + \rho gh, \quad (2)$$

gdzie g to przyspieszenie grawitacyjne. Warunek równowagi wymaga zatem, aby spełniona była równość $p_a = p' + \rho gh$. Gdyby rurka była otwarta od góry, wówczas ciśnienie p' byłoby równe ciśnieniu atmosferycznemu p_a , co pociągałoby za sobą $h = 0$, tzn. rtęć wylałaby się z rurki. Ponieważ jednak rurka jest zamknięta oraz nad rtęcią nie ma powietrza, ciśnienie p' nad powierzchnią rtęci w rurce jest bliskie zero (w istocie znajduje się tam niewielka ilość

pary rtęci). Ciśnienie w rurce, na poziomie powierzchni cieczy w szerokim naczyniu, wynosi zatem ρgh (Rys. 1) i, zgodnie z warunkiem równowagi, mamy wówczas:

$$p_a = \rho gh. \quad (3)$$

Mierząc wysokość słupa rtęci w barometrze można na podstawie związku (3) ustalić wartość ciśnienia atmosferycznego. W warunkach normalnych wysokość słupa rtęci wynosi 760 mm, co daje $p_a = 13595 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,76 \text{ m} = 101325 \text{ Pa} \approx 1013 \text{ hPa}$. Gdybyśmy zamiast rtęci chcieli stworzyć barometr z użyciem innej cieczy, o mniejszej gęstości, rurka pionowa musiałaby być znacznie dłuższa. Na podstawie równania (3) widzimy, że na przykład w barometrze wodnym, z powodu tego że gęstość wody ρ jest ok. 13 razy mniejsza niż gęstość rtęci, słup wody w barometrze miałby wysokość h 13 razy większą, tzn. przy ciśnieniu normalnym równą $13 \cdot 0,76 \text{ m} \approx 10 \text{ m}$. Przyrząd musiałby więc mieć podobną wysokość, co sprawia, że byłby całkowicie niepraktyczny.

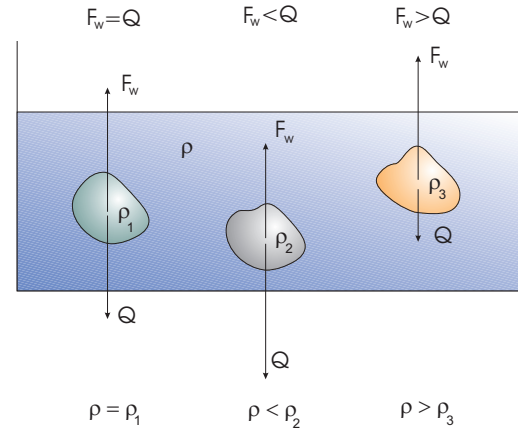
Wzajemna relacja między gęstością cieczy a gęstością zanurzonego (całkowicie) w cieczy ciała decyduje o tym, czy ciało będzie w cieczy pływać pod powierzchnią, tonąć, czy też wypływać na powierzchnię. Aby się o tym przekonać przywołajmy *prawo Archimedesesa*. Głosi ono, iż:

Na każde ciało zanurzone częściowo lub całkowicie w płynie (cieczy lub gazie) działa siła wyporu skierowana pionowo do góry i równa co do wartości ciężarowi wypartego przez to ciało płynu.

Jeśli V oznacza objętość zanurzonej części ciała (i jest to zarazem objętość wypartej cieczy), ρ - gęstość cieczy, a g - przyspieszenie ziemskie, to wartość siły wyporu można na mocy prawa Archimedesesa zapisać w postaci:

$$F_w = \rho g V. \quad (4)$$

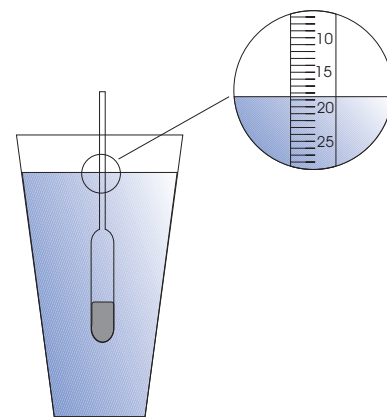
Ciało zanurzone (całkowicie) w cieczy będzie się unosić pod powierzchnią cieczy, gdy siła wyporu \vec{F}_w będzie równoważyć ciężar ciała \vec{Q} , tzn. $F_w = Q$ (Rys. 2). Ponieważ $Q = mg = \rho_o Vg$, gdzie masę m ciała wyraziliśmy poprzez gęstość ciała ρ_o i jego objętość V , warunek równowagi daje nam równość $\rho g V = \rho_o g V$. Po uproszczeniu, ostatnia równość przyjmuje postać $\rho = \rho_o$, czyli warunkiem pływania ciała pod powierzchnią jest równość gęstości cieczy i gęstości ciała. Ciało zanurzone w płynie będzie tonąć, gdy siła ciężkości przewyższa siłę wyporu, tzn. $F_w < Q$, co po wstawieniu powyższych wzorów na F_w oraz Q da nam relację $\rho < \rho_o$. Zatem ciało tonie, gdy ma gęstość większą niż gęstość cieczy. Z kolei ciało będzie wypływać na powierzchnię, gdy $F_w > Q$, co jest równoważne nierówności $\rho > \rho_o$. Ciało, które wypływa na powierzchnię, ma zatem gęstość mniejszą niż gęstość



Rysunek 2. Zachowanie ciała w zależności od relacji jego gęstości do gęstości cieczy ρ . Ciało o gęstości ρ_1 pływa pod powierzchnią cieczy, ciało mające gęstość ρ_2 tonie, a to o gęstości ρ_3 wypływa na powierzchnię.

cieczy. Ryba reguluje swoją gęstość poprzez zmianę objętości pęcherza pławnego, co zapewnia jej utrzymanie odpowiednich warunków dla pływania pod powierzchnią wody. Łódź podwodna posiada zbiorniki balastowe, które są wypełniane wodą lub opróżniane. W ten sposób poprzez zmianę ciężaru okrętu, przy stałej jego objętości, modyfikowana jest jego gęstość, co umożliwi wykonanie manewru wynurzenia lub zanurzenia się statku.

Ciało mające gęstość mniejszą niż gęstość cieczy, będąc częściowo zanurzone, może unosić się na powierzchni. Obowiązuje wówczas warunek równowagi $F_w = Q$, czyli $\rho g V' = \rho_o g V$, gdzie V' jest objętością części zanurzonej, a V objętością całego ciała. Wynika stąd, że $V' = \rho_o V / \rho$, tzn. objętość części zanurzonej jest odwrotnie proporcjonalna do gęstości cieczy ρ . Fakt ten jest podstawą działania tzw. areometrów, czyli przyrządów do pomiaru gęstości cieczy na podstawie głębokości ich zanurzenia (Rys. 3). Areometry można wyskalować tak, by bezpośrednio



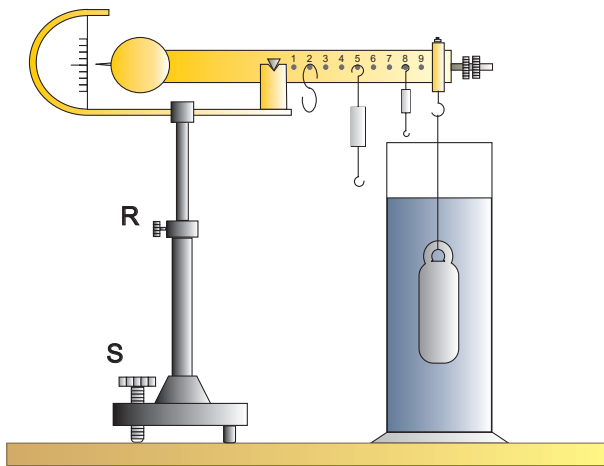
Rysunek 3. Areometr zbudowany jest z bańki obciążonej materiałem o dużej gęstości oraz pustej rurki pionowej, na której znajduje się skala przyrządu.

pokazywały gęstość cieczy lub stężenie roztworu (np. cukru, alkoholu), w którym są zanurzone. W zależności od przeznaczenia areometrów wyróżnia się m. in. alkoholometry, cukromierze, laktodensymetry, urynometry, kwasomierze.

Rozwiąż następujący problem: Kostka lodu pływa na powierzchni wody w naczyniu. Czy po roztopieniu się lodu poziom wody w naczyniu wzrośnie, zmaleje, czy pozostanie bez zmian?

ZASADA DZIAŁANIA WAGI MOHRA

Waga Mohra to rodzaj wagi belkowej pozwalającej na pomiar gęstości cieczy (Rys. 4). Na jednym z ramion wagi



Rysunek 4. Waga Mohra.

wieszamy pływak i umieszczamy go w cieczy. Równowaga wagi zostaje osiągnięta przez zawieszenie obciążników, zwanych konikami, na kołkach umieszczonych na ramieniu wagi. O tym, czy belka jest w równowadze, decyduje wielkość zwana momentem siły.

Moment siły, \vec{M} , względem jakiegoś punktu O zdefiniowany jest jako iloczyn wektorowy ramienia siły \vec{r} i siły \vec{F} :

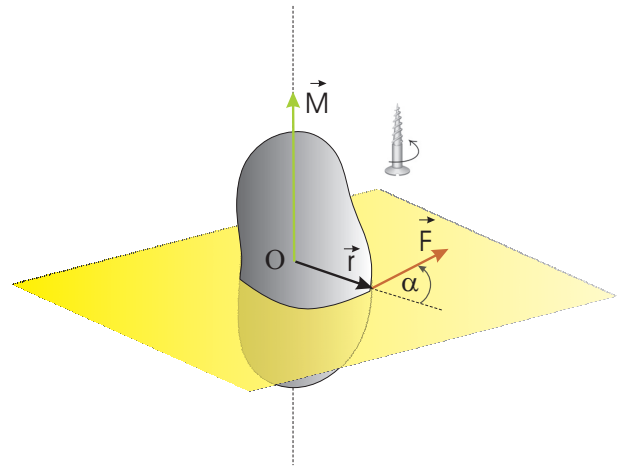
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (5)$$

Ramię siły \vec{r} to wektor poprowadzony od punktu O do miejsca przyłożenia siły \vec{F} (Rys. 5). Na mocy definicji iloczynu wektorowego, moment siły \vec{M} jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny, w której leżą wektory \vec{r} i \vec{F} , a jego zwrot określa reguła śruby prawoskrętnej. Wartość momentu siły obliczamy z wzoru:

$$M = r F \sin \alpha, \quad (6)$$

gdzie α to kąt pomiędzy wektorem \vec{r} i \vec{F} . Jeśli kąt między wektorem siły i ramienia siły wynosi 90° , wówczas $\sin \alpha = 1$ i wartość momentu siły wynosi:

$$M = r F. \quad (7)$$



Rysunek 5. Kierunek i zwrot wektora momentu siły \vec{M} .

Jeśli na jakieś ciało rozciągnięte (bryłę sztywne) działa kilka równoważących się sił, ciało takie niekoniecznie będzie w stanie równowagi. Choć jako całość (tj. jej środek masy) nie będzie doznawał przyspieszenia, to jednak przyłożone siły mogą spowodować, że zacznie wykonywać ruch obrotowy. Ruch obrotowy bryły sztywnej zależy od działającego nań *momentu sił*. Aby bryła nie doznawała przyspieszenia w ruchu obrotowym (tzn. pozostawała w równowadze), musi być spełniony następujący warunek:

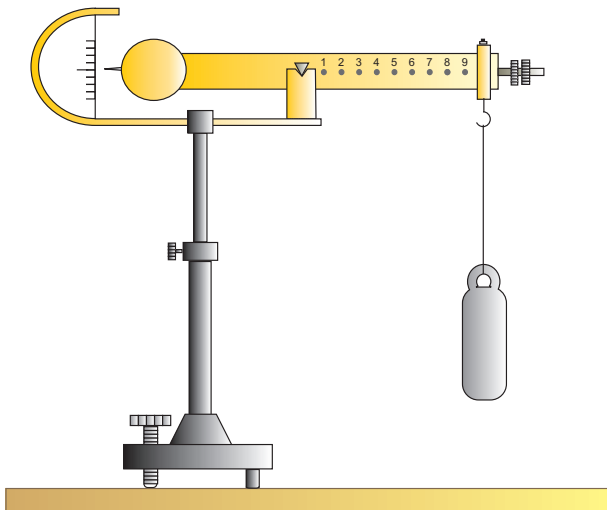
Bryła sztywna znajduje się w równowadze wtedy, gdy całkowity moment sił na nią działających wynosi zero.

A zatem belka wagi będzie w równowadze, gdy momenty wszystkich sił na nią działających wzajemnie się znoszą.

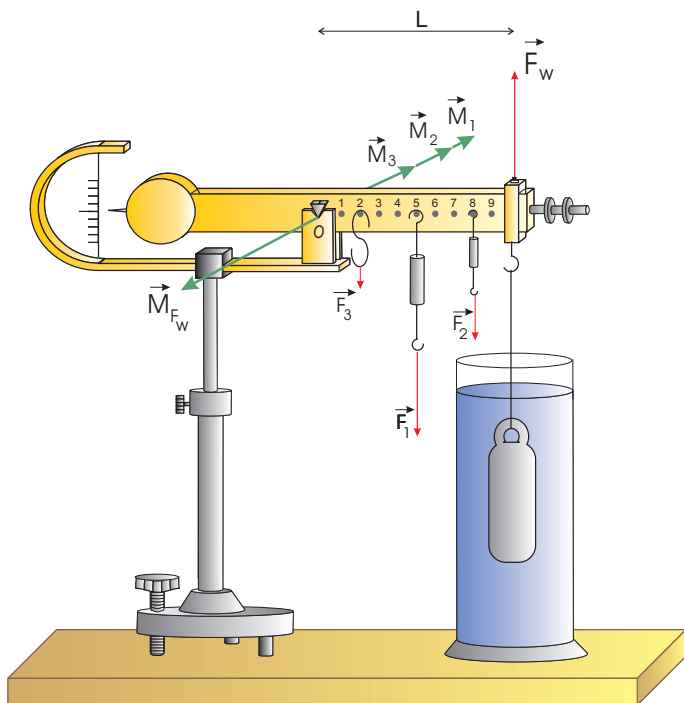
Gdy nurek wagi Mohra wisi swobodnie w powietrzu (Rys. 6), wówczas belka wagi jest w równowadze. Jeśli nurek zostanie zanurzony w cieczy, zadziała na niego *siła wyporu* \vec{F}_w . W rezultacie siła naciągu nici, na której zawieszony jest pływak, ulegnie zmniejszeniu o wartość F_w . Zmniejszenie naciągu nici sprawia, że belka wagi zachowa się tak, jakby na jej koniec zadziałała w górę siła równa sile wyporu \vec{F}_w . Siła ta spowoduje powstanie momentu siły \vec{M}_{F_w} działającego na belkę wagi i zaburzającego jej równowagę (Rys. 7). Aby przywrócić równowagę wagi należy powiesić na odpowiednich kołkach obciążniki-koniki, które swoim ciężarem spowodują powstanie przeciwnego momentu siły \vec{M}_k , który zrównoważy moment siły \vec{M}_{F_w} . Warunek równowagi wagi można w tej sytuacji przedstawić jako:

$$M_{F_w} = M_k. \quad (8)$$

Jeśli zawieszono zostaną np. trzy koniki, to całkowity moment sił ciężkości koników jest równy *sumie* momentów



Rysunek 6. Gdy pływak wisi w powietrzu, waga Mohra jest w równowadze.



Rysunek 7. Gdy pływak jest zanurzony w cieczy, równowaga wagi zachodzi, gdy całkowity moment sił koników $\vec{M}_k = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3$ równoważy moment siły wyporu \vec{M}_{F_w} .

sił pochodzących od każdego z koników:

$$M_k = M_1 + M_2 + M_3. \quad (9)$$

Gdy belka wagi jest w pozycji poziomej moment siły wyporu \vec{F}_w działającej na krawędź belki wynosi (patrz wzór (7)):

$$M_{F_w} = F_w \cdot L, \quad (10)$$

bowiem kąt α pomiędzy siłą \vec{F}_w i jej ramieniem wynosi 90° . W powyższym wzorze L oznacza długość ramienia wagi Mohra, czyli odległość, w jakiej zawieszony jest pływak licząc od osi obrotu O . Biorąc pod uwagę wzór (4), mamy:

$$M_{F_w} = \rho g V L, \quad (11)$$

gdzie V oznacza objętość pływaka.

Rozważmy z kolei moment sił ciężkości wywierany przez zawieszone koniki. Ciężary koników pozostają w stosunku $1 : \frac{1}{10} : \frac{1}{100}$. Dla uproszczenia zakładamy, że zawieszono trzy różne koniki o ciężarach F_1 , F_2 i F_3 , przy czym:

$$F_2 = \frac{1}{10} F_1, \quad F_3 = \frac{1}{100} F_1. \quad (12)$$

Na podstawie definicji momentu siły (7), całkowity moment sił ciężkości koników wynosi:

$$M_k = F_1 \cdot r_1 + F_2 \cdot r_2 + F_3 \cdot r_3, \quad (13)$$

gdzie r_1 , r_2 i r_3 to odległości od osi obrotu O , w jakich powieszono koniki, czyli są to ramiona sił ciężkości, odpowiednio F_1 , F_2 i F_3 . Ponownie skorzystaliśmy tutaj z faktu, że kąt α pomiędzy ramieniem każdej z sił ciężkości i siłą wynosi 90° . Ponieważ odstęp między kołkami wagi wynosi $\frac{1}{10} L$, więc:

$$r_1 = n_1 \cdot \frac{1}{10} L, \quad r_2 = n_2 \cdot \frac{1}{10} L, \quad r_3 = n_3 \cdot \frac{1}{10} L, \quad (14)$$

gdzie n_1 , n_2 i n_3 to numery kołków, na których powieszono koniki o ciężarach, odpowiednio F_1 , F_2 i F_3 .

Uwzględniając wzory (12) oraz (14), na podstawie równania (13) moment siły koników wynosi:

$$M_k = F_1 L \cdot (0,1 \cdot n_1 + 0,01 \cdot n_2 + 0,001 \cdot n_3). \quad (15)$$

Wprowadzając stałą $k = F_1 L$, ostatni wzór można zapisać w formie:

$$M_k = k \cdot f, \quad (16)$$

gdzie:

$$f = 0,1 \cdot n_1 + 0,01 \cdot n_2 + 0,001 \cdot n_3. \quad (17)$$

Liczba f jest *wartością momentu siły wyrażonego w jednostkach k* (tzn. za jednostkowy moment siły uznajemy moment siły równy $k = F_1 L$). Na przykład, jeśli $n_1 = 5$, $n_2 = 8$ i $n_3 = 2$, jak pokazano na Rys. (4) lub (7), wówczas otrzymujemy $f = 0,582$. (Uwaga: Gdyby w doświadczeniu użyto dwóch dużych koników zawieszonych w pozycjach n'_1 oraz n''_1 , wówczas w formule (17) należy zamiast n_1 podstawić sumę $n'_1 + n''_1$.)

W sytuacji równowagi belki równość momentów sił (8) przyjmuje postać:

$$\rho g V L = k \cdot f. \quad (18)$$

Ostatnie równanie można zastosować w sytuacji, gdy nurek zanurzony jest w wodzie (cieczy wzorcowej o *znanej* gęstości ρ_w) oraz ponownie, gdy pływak zanurzony jest w cieczy o nieznannej gęstości ρ_x :

$$\begin{aligned}\rho_w g V L &= k \cdot f_w, \\ \rho_x g V L &= k \cdot f_x,\end{aligned}\quad (19)$$

gdzie f_w i f_x to momenty sił koników potrzebne do zrównoważenia wagi Mohra, gdy pływak zanurzony jest odpowiednio w wodzie i w cieczy o nieznannej gęstości. Dzieliąc stronami ostatnie równania otrzymujemy po przekształceniach:

$$\rho_x = \frac{f_x}{f_w} \rho_w. \quad (20)$$

Powyższe równanie pozwala wyznaczyć gęstość nieznannej cieczy na podstawie pomiarów momentów sił koników f_w i f_x .

Zauważmy, że zapisując wielkość $k = F_1 L$ jako $k = m_1 g L$, gdzie m_1 to masa największego konika, z równania (18) wynika, iż $\rho = f m_1 / V$. Gdy $m_1 = 10$ g oraz $V = 10$ cm³, jak to jest w wersji fabrycznej wagi Mohra, dostajemy $\rho = f$, a zatem wynik pomiaru f jest równy gęstości cieczy wyrażonej w g/cm³. Waga Mohra pozwala więc także na bezpośredni pomiar bezwzględnej wartości gęstości cieczy.

WYKONANIE ĆWICZENIA

1. Ustawić wagę zgodnie z następującymi zasadami: Na końcu belki wieszamy pływak i, luzując śrubę R (Rys. 1), regulujemy wysokość wagi tak, aby w dalszej części doświadczenia pływak zanurzał się *całkowicie* w 100 cm³ cieczy umieszczonej w cylindrze miarowym. Ustawiamy belkę wagi tak, aby śruba S oraz belka wagi znajdowały się w jednej płaszczyźnie. Dokręcamy śrubę R. Za pomocą śruby S ustawiamy wagę tak, aby belka znalazła się w położeniu poziomym. **Podczas pomiarów nie zmieniamy ustawienia wagi.**

2. Zanurzyć pływak całkowicie w wodzie destylowanej. Przywrócić równowagę wagi wieszając odpowiednie koniki. Odczytać pozycje koników i wyniki zapisać w tabeli. Wpisać wartość momentu siły f_w obliczoną na podstawie formuły (17).

3. Sporządzić wodny roztwór NaCl o stężeniu $C_1=11$ g/100 cm³ (odważyć 11 g soli i uzupełnić wodą do 100 cm³). Zanurzyć pływak całkowicie w roztworze. Przywrócić równowagę wieszając odpowiednie koniki. Odczytać pozycje koników i wyniki zapisać w tabeli. Wpisać wartość momentu siły f_1 .

4. Rozcieńczyć poprzedni roztwór do stężenia $C_2 = 7$ g/100 cm³ (patrz uwaga na końcu instrukcji) i analogicznie jak w p. 3 wyznaczyć moment siły f_2 równoważący wagę w przypadku roztworu o stężeniu C_2 .

5. Zmierzyć temperaturę t .

Tabela 2: Wyniki pomiarów.

	pozycja dużego konika	pozycja średniego konika	pozycja małego konika	całkowity moment siły
woda				f_w
roztwór o stężeniu C_1				f_1
roztwór o stężeniu C_2				f_2

OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIAROWYCH

1. Obliczyć gęstości pierwszej i drugiej cieczy z wzoru (20) wstawiając w miejsce f_x kolejno: f_1 i f_2 , a za ρ_w gęstość wody wartość odczytaną z tabeli dla odpowiedniej temperatury.

2. Za niepewność maksymalną pomiaru momentu siły f przyjmując w każdym przypadku wartość $\Delta_d f = 0,001$. Znaleźć niepewności standardowe $u(f)$ - wzór (4) w "Wprowadzenie do metod opracowania wyników pomiarowych" .

3. Z uwagi na to, że wzór (20) na wielkość ρ_x ma postać funkcji iloczynowej wielu zmiennych ($\rho_x = \rho_w f_x^1 f_w^{-1}$), niepewność standardową pomiaru gęstości dla poszczególnych cieczy, $u(\rho_1)$ i $u(\rho_2)$, wyliczyć według wzoru (12) podanego w materiałach "Wprowadzenie..." .

4. Zaokrąglij otrzymane wartości $u(\rho_x)$ oraz wyniki uzyskane dla gęstości ρ_x według zasad przedstawionych w materiałach "Wprowadzenie..." , str 13 oraz zaprezentuj wyniki końcowe.

Uwaga:

Aby otrzymać roztwór o stężeniu C_2 należy x cm³ roztworu C_1 uzupełnić wodą destylowaną do objętości 100 cm³.

Rozcieńczenie roztworu:

w 100 cm³ roztworu - C_1 gramów soli
w x cm³ roztworu - C_2 gramów

$$\text{stąd: } x = \frac{100 C_2}{C_1}.$$

Tabela 3: Gęstości wody w różnych temperaturach.**LITERATURA**

t [°C]	ρ_w [g/cm ³]	t [°C]	ρ_w [g/cm ³]	t [°C]	ρ_w [g/cm ³]
10	0,99973	17	0,99880	24	0,99730
11	0,99963	18	0,99862	25	0,99704
12	0,99953	19	0,99843	26	0,99678
13	0,99940	20	0,99823	27	0,99651
14	0,99927	21	0,99802	28	0,99623
15	0,99913	22	0,99780	29	0,99594
16	0,99897	23	0,99757	30	0,99565

1. T. Dryński - Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki.
2. D. Holliday, R. Resnick - Fizyka, tom I.
3. J. Orear - Fizyka, tom I.
4. Sz. Szczeniowski - Fizyka doświadczalna, cz. 1.
5. Encyklopedia Fizyki, tom I.